**Buchbesprechung von**
**"The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups**
von K. H. Hofmann und S. A. Morris

EMS Tracts in Mathematics 2, Europ. Math. Soc., Zürich, 2007

Die Liesche Gruppentheorie wurde vor mehr als 100 Jahren durch die grundlegenden Arbeiten von Sophus Lie und Élie Cartan ins Leben gerufen und entwickelt sich seitdem in vielen Bereichen der Mathematik in den verschiedensten Ausprägungen weiter. Ihr Hauptcharakteristikum ist, dass sie es erlaubt, durch einen Linearisierungsprozess einer Gruppe eine Lie-Algebra zuzuordnen und für zusammenhängende Gruppen ihre strukturellen Eigenschaften aus der Lie-Algebra zu erschließen. Den klassischen Rahmen dieser Theorie bilden die endlichdimensionalen Lie-Gruppen, also glatte Mannigfaltigkeiten mit einer glatten Gruppenstruktur.

Möchte man den Rahmen der Theorie erweiteren, so bieten sich hier zwei Standpunkte an. Der differentialgeometrische, der Lie-Gruppen als Mannigfaltigkeiten über unendlichdimensionalen Modellräumen (Banach, Fréchet, oder sogar lokalkonvex) definiert, oder der topologische, der Lie-Gruppen als spezielle topologische Gruppen betrachtet. Das vorliegende Buch stellt sich auf den topologischen Standpunkt. Dem zugrunde liegt, dass Lie-Gruppen insbesondere topologische Gruppen sind und ihre glatte Struktur in eindeutiger Weise durch die Topologie bestimmt ist. So fragt zum Beispiel das fünfte Hilbertsche Problem nach einer Charakterisierung der Lie-Gruppen unter den lokalkompakten Gruppen als diejenigen, die lokal euklidisch, also topologische Mannigfaltigkeiten sind. Nachdem dieses Problem in den 1950er Jahren positiv beantwortet war, zeigte Yamabe, dass jede zusammenhängende lokalkompakte Gruppe ein projektiver Limes von Lie-Gruppen ist, und dieser Satz wurde ein zentrales Werkzeug in der Theorie der lokalkompakten Gruppen.

Man könnte eine Strukturtheorie zusammenhängender lokalkompakter Gruppen nun dadurch angehen, dass man systematisch den Satz von Yamabe und die endlichdimensionale Lie-Theorie ausschlachtet, was auch durchaus in der Vergangenheit getan wurde, z.B. um endlichdimensionale lokalkompakte Gruppen zu analysieren, wie sie in der topologischen Geometrie auftreten. Allerdings hat die Kategorie der lokalkompakten Gruppen einige wesentliche Schwächen, die der Entwicklung einer "runden" Theorie im Wegen stehen. Eine davon ist, dass Produkte lokalkompakter Gruppen i.a. nicht lokalkompakt sind und dass die Lie-Algebren unendlichdimensionaler lokalkompakter Gruppen, wie z.B., $\mathcal{L}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, nicht mehr lokalkompakt sind.

Die vorliegende Monographie beschreitet daher einen anderen Weg und stellt von vornherein die größere Kategorie der pro-Lie-Gruppen, also der projektiven Limiten von Lie-Gruppen, ins Zentrum. Da jede lokalkompakte Gruppe eine offene pro-Lie-Gruppen enthält, erfasst man damit insbesondere die Lie-Theorie im lokalkompakten Fall.

Ein wichtiger begrifflicher Schritt zur Entwicklung der Theorie ist das Konzept einer *topologischen Gruppe $G$ mit Lie-Algebra*, von der man verlangt, dass die Menge $\mathcal{L}(G) := \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ der stetigen Einparametergruppen von $G$, versehen mit der kompakt offenen Topologie, derart zu einer topologischen Lie-Algebra wird, dass die Trotter-Produkt-Formel

$$(\alpha + \beta)(t) = \lim_{n\to\infty} \Big(\alpha(\frac{t}{n})\beta(\frac{t}{n})\Big)^n$$

und die Kommutator-Formel

$$[\alpha, \beta](t^2) = \lim_{n\to\infty} \Big(\alpha(\frac{t}{n})\beta(\frac{t}{n})\alpha(-\frac{t}{n})\beta(-\frac{t}{n})\Big)^{n^2}$$

jeweils für all $t \in \mathbb{R}$ gelten. Die Auswertungsabbildung

$$\mathrm{Exp}\colon \mathcal{L}(G) \to G, \quad \gamma \mapsto \gamma(1)$$

spielt in diesem Kontext die Rolle der Exponentialfunktion. Mit der Einsicht, dass die Kategorie der topologischen Gruppen mit Lie-Algebra unter projektiven Limiten abgeschlossen ist und

$\mathcal{L}$ Limiten respektiert, erhält man einen Lie-Funktor, der jeder pro-Lie-Gruppe eine pro-Lie-Algebra, also einen projektiven Limes endlichdimensionaler Lie-Algebren, zuordnent. Damit ist der Rahmen eine Lie-Theorie für pro-Lie-Gruppen abgesteckt, wie sie von Hofmann und Morris in dem vorliegenden Buch entwickelt wird.

Das Buch ist in 14 Kapitel gegliedert, die durch 3 Anhänge ergänzt werden. Die Einleitung bildet ein ausführliches Übersichtskapitel, das dem Leser die Orientiertung in der weit verzweigten Theorie außerordentlich erleichtert. Das erste Kapitel behandelt (projektive) Limiten topologischer Gruppen und ihre Charakterisierungen, das zweite führt Lie-Algebren topologischer Gruppen ein und im dritten werden pro-Lie-Gruppen und ihre Lie-Algebren definiert. Die weiteren Kapitel behandeln jeweils verschiedene Aspekte der Theorie. Im vierten Kapitel werden Quotienten von pro-Lie-Gruppen diskutiert, wobei das Hauptproblem darin besteht, dass Quotienten im allgemeinen unvollständig sind. Für die Liesche Theorie von zentraler Bedeutung ist hierbei das Hochheben von Einparametergruppen von Quotienten.

Abelsche pro-Lie-Gruppen werden in Kapitel 5 behandelt. Die Strukturtheorie dieser Gruppen verallgemeinert in sehr natürlicher Weise die klassische Strukturtheorie lokalkompakter abelscher Gruppen. Ein bemerkenswerter Struktursatz ist, dass jede zusammenhängende abelsche pro-Lie-Gruppe von der Form $\mathbb{R}^J \times C$ ist, wobei $C$ eine kompakte abelsche Gruppe und $J$ eine beliebige Menge ist. Darüber hinaus lässt sich einiges aus der Dualitätstheorie lokalkompakter abelscher Gruppen übertragen, wenn man sie mit der linearen Dualitätstheorie der sogenannten schwach vollständigen Vektorräume kombiniert. Das sind lokalkonvexe Räume der Gestalt $\mathbb{R}^J$ und der entsprechende Dualraum $\mathbb{R}^{(J)}$ (der freie Vektorraum über der Menge $J$), den man mit der Charaktergruppe identifizieren kann, trägt jeweils die feinste lokalkonvexe Topologie. Dessen Dualraum ist wieder $\mathbb{R}^J$, so dass man eine gute Dualitätstheorie erhält.

Eine kategorielle Variante des dritten Lieschen Fundamentalsatzes über die Existenz einer Lie-Gruppe zu einer gegebenen Lie-Algebra wird in Kapitel 6 für pro-Lie-Gruppen bewiesen, indem man den zum Lie-Funktor $\mathcal{L}$ adjungierten Funktor $\Gamma$ konstruiert und aus dem endlichdimensionalen Fall schließt, dass für jede pro-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auch wieder $\mathcal{L}(\Gamma(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$ gilt, d.h., dass jede pro-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auch die Lie-Algebra einer pro-Lie Gruppe ist.

Von zentraler Bedeutung für die Schlagkraft einer Strukturtheorie der pro-Lie-Gruppen ist natürlich, inwieweit man die Struktur ihrer Lie-Algebren analysieren kann. Dieser Thematik ist Kapitel 7 gewidmet, das man als das Herz des Buches ansehen kann. Hier wird die Strukturtheorie endlichdimensionaler Lie-Algebren auf pro-Lie-Algebren übertragen, und es ist erstaunlich, wieviele der zentralen Sätze sich verallgemeinern lassen. Zunächst einmal enthält jede pro-Lie-Algebre $\mathfrak{g}$ ein eindeutiges maximales pro-auflösbares Ideal $\mathfrak{r}$ und der Quotient $\mathfrak{s} := \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ ist ein Produkt $\prod_{j\in J} \mathfrak{s}_j$ einfacher endlichdimensionaler Lie-Algebren. Ein Analogon des Satzes von Levi-Malcev besagt nun, dass $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}$ sogar ein semidirektes Produkt ist und alle Levi-Komplemente von $\mathfrak{r}$ zueinander konjugiert sind. Sogar die Theorie der Cartan-Unteralgebren, die hier als abgeschlossene pro-nilpotente selbstnormalisierende Unteralgebren definiert werden, lässt sich einschließlich Existenz- und Konjugationssätzen entwickeln.

Gerüstet mit dieser schlagkräftigen Strukturtheorie für pro-Lie-Algebren, erfährt der Leser in Kapitel 8, wie sich all dies auf die (pro-)einfach zusammenhängenden Gruppen $G = \Gamma(\mathfrak{g})$ überträgt. Sie sind ebenfalls semidirekte Produkte $G = R \rtimes S$; dabei ist $S$ ein Produkt einfacher Lie-Gruppen und $R$ pro-auflösbar und homömorph zur einem $\mathbb{R}^J$. Damit ist die Topologie im einfach zusammenhängenden Fall vollständig geklärt und man sieht damit deutlich, dass alle topologischen Komplikationen durch Limiten nicht einfach zusammenhängender Gruppen verursacht werden. Da Überlagerungen zusammenhängender Gruppen zentrale Erweiterungen sind, spielt das Zentrum hier eine ausgezeichnete Rolle, wodurch die Theorie der abelschen pro-Lie-Gruppen in entscheidender Weise eingeht.

Nachdem in Kapitel 9 das Instrumentarium der analytischen Untergruppen, Automorphismengruppen, Kommutatoren etc. entwickelt wird, wird dies in Kapitel 10 zur Analyse der Struktur zusammenhängender pro-Lie-Gruppen angewandt. In Kapitel 11 findet man weitere Verfeinerungen wie Abspaltungssätze für reduktive Untergruppen, Vektorgruppen und die Struktur pro-nilpotenter und pro-auflösbarer Gruppen. Existenz und Konjugation der maximal kompakten Untergruppen ist ein zentrales Resultat in Kapitel 12 und pro-Varianten des lokalen Abspaltungssatzes von Iwasawa, der ihre Struktur lokal als Produkt einer "kleinen" kompakten

Untergruppe und einer Lie-Gruppe beschreibt, werden in Kapitel 13 bewiesen. Kapitel 14 ist ein Katalog von Beispielen.

Methodisch ruht die Theorie der pro-Lie-Gruppen ganz wesentlich auf drei Säulen: der endlichdimensionalen Strukturtheorie, der Theorie kompakter Gruppen und der Struktur abelscher pro-Lie-Gruppen, wobei letztere in wesentlichen Punkten auf den kompakten Fall reduziert wird. In diesem Sinn ist das vorliegende Buch eine Fortsetzung des Lehrbuchs "The Structure of Compact Groups" (Studies in Math., de Gruyter, Berlin, 1998/2006) der gleichen Autoren über die Struktur kompakter Gruppen.

Das Buch gibt einen sehr umfassenden Einblick in die Struktur zusammenhängender projektiver Limiten endlichdimensionaler Lie-Gruppen und komplementiert damit andere Zweige der modernen unendlichdimensionalen Lie-Theorie, die sich z.B. mit induktiven Limiten endlichdimensionaler Lie-Gruppen beschäftigen.

Es bietet einem Leser durch Standortbestimmungen am Anfange und Ende der Kapitel einen sehr effektiven Leitfaden, der auch lokales Lesen bestens unterstützt und das Material sowohl historisch als auch mathematisch einordnet. Die hier ausgebreitete profunde Theorie der pro-Lie-Gruppen ist ein Meilenstein der Lieschen Theorie, der Anknüpfungspunkte zu vielen anderen Bereichen aufweist. Z.B. ordnen sich hier Gruppen unter, die durch Vervollständigungen freier Algebren entstehen oder auch Gruppen von Jets unendlicher Ordnung, wie sie in der Differentialgeometrie auftreten. In diesem Sinn kann ich das Buch jedem Leser, der sich für einzelne Aspekte projektiver Limiten oder auch allgemein für Lie-Gruppen interessiert, nur wärmstens empfehlen.

Darmstadt K.-H. Neeb